רקנאטי
הפקולטה לניהול
אוניברסיטת תל־אביב

מתימטיקה למנ"ס – מבחן פטור
דוגמא עם פתרון

משך הבחינה: 2.5 שעות חומר עזר מודפס או כתוב
יש לענות על כל השאלות. ציון עובר דורש צבירת מינימום 60 דקות
מהן לפחות 30 בשאלה ראשונה, 30 בשניה ו-6 בשלישית.

(1) א. חקור את הפונקציה הנתונה חקירה מלאה ובכלל שרטוט סכימטי.
יש להתיחס לתחום הגדרה, אי רציפות לסוגיה, גבולות בנקודות
20 נק' בעיתיות, חתוך עם צירים, שאיפה לאינסוף, אסימפטוטות, נקודות
קיצון, עליה וירידה, נקודות פתול קמירות וקעירות.

$$f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$$

ב. נתונות הפונקציות $f(x)=x^3-x$, $f(x)=3x$ מצא השטח
13 נק' הכלוא ביניהן

ג. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-1}{2x^2-x-1}$

12 נק' רשום את נקודות אי הרציפות וסוגן וכן את <u>מספר</u> נקודות
החתוך עם ציר x. הסבר את קביעותיך.

(2) א. נתונה הפונקציה הסתומה: $(5+2y)^7+A(x)+e^{1+2x}=B(y)-x^5$

15 נק' ידוע כי $A(x)$ פונק' עולה, $B(y)$ פונקציה יורדת
קבע האם $y(x)$ עולה או יורדת.

ב. נתונה פונקציית הבקוש $P(Q,T)=6-Q+\sqrt{T}$ באשר
P מחיר יחידה, Q הכמות, T הוצאות לתקשורת
15 נק' ההוצאה הממוצעת ליחידה היא $AC(Q,T)=T+2$
מצא את הרווח המקסימלי האפשרי.

ג. פונקציה הומוגנית מקיימת את התנאי: $f(kx,ky)=k^m f(x,y)$

כאשר m היא דרגת ההומוגניות.

15 נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y-1$

נק האם היא הומוגנית ואם כן מה דרגת ההומוגניות?

שרטט עבורה עקומות שוות רמה ורשום $f(1,2x)$, $f(1,0)$

3 א. נתונות המטריצות: $A\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

10 מצא מטריצה C המקיימת $C=B^2+A^2+(AB)^2+(BA)^2$

נק ב. 2 מטריצות פלשהן B, A מקיימות $B=I-A$ הראה

שהמטריצות B, A קומוטטיביות לגבי הפפל.

בהצלחה!

פתרון מבחן דוגמא.

1 א.

$$f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

תחום הגדרה: $x\neq 1,-1$

אי רציפות סליקה בנקודה $x=-1$ ($\frac{0}{0}$, יש גבול, "חור")

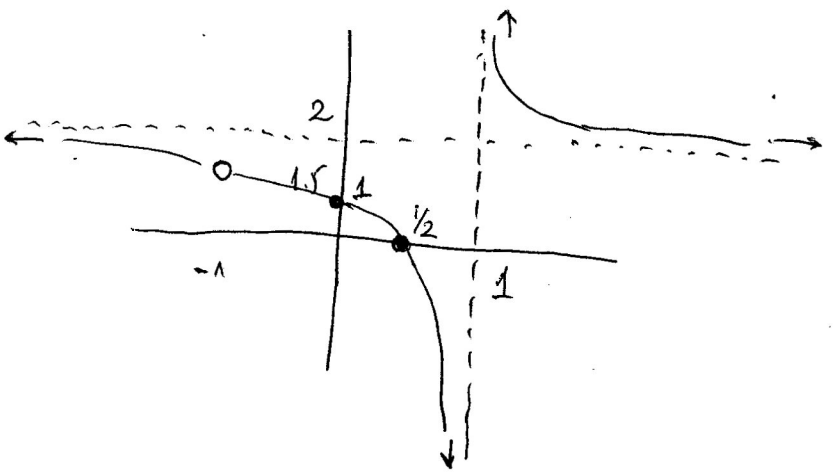
" לא סליקה בנקודה $x=1$ ($\frac{\text{מספר}}{0}$, אין גבול, "חומה")

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x-1}=\frac{3}{2}$$

לאחר סימון ה"חור" הפונקציה המצומצמת

$$g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

שווה בכל ל $f(x)$ פרט ל $x=-1$ שבבר טופל. לכן ממשכים לרקור את $g(x)$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2^+ \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2^-$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{x-1}=\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=-\infty$$

$$g'(x)=\frac{2(x-1)-(2x-1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}=-(x-1)^{-2}$$

$g'(x)$ שלילית תמיד ולכן הפונקציה יורדת כל הזמן. אין נק' קיצון

$g''(x)$ לא מתאפסת לכן אין נק' פתול

$$g''(x)=2(x-1)^{-3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$g''(x)>0 \leftarrow x>1$ "צוחקת"

$g''(x)<0 \leftarrow x<1$ "בוכה"

ב. נחפש נק' חתוך ביניהן

$$3x = x^3 - x$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0 \qquad x = -2, 0, 2$$

לפיכך יש לפתור 2 אינטגרלים ולחבר ערכים מוחלטים

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\Big]_{-2}^{0} = 0 - (4-8) = 4$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2\Big]_{0}^{2} = \left(\frac{16}{4} - 8\right) - 0 = -4$$

$$S = 4 + 4 = 8$$

ג.

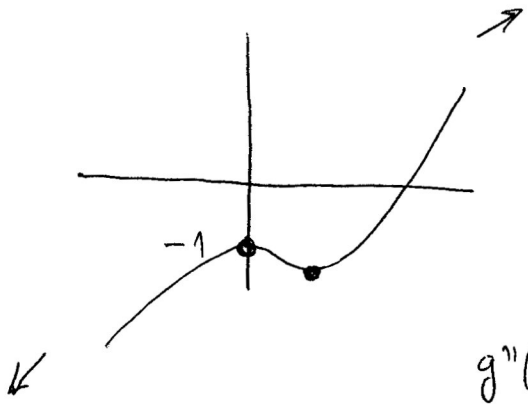
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{(2x+1)(x-1)}$$

נקודת אי רציפות $x=1$ בלתי סליקה ($\frac{\text{מספר}}{0}$, אין גבול)

" $x = -\frac{1}{2}$ בלתי סליקה (")

למציאת נקודות חתוך עם ציר x יש לפתור $g(x) = x^3 - 2x^2 - 1 = 0$

נחקור את $g(x)$ למציאת מספר נקודות חתוך.



$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = 3x^2 - 4x$$
$$x(3x-4) = 0$$

נק' קיצון $\underset{\max}{(0, -1)}$ $\underset{\min}{\left(\frac{4}{3}, \frac{-55}{27}\right)}$

$$g''(x) = 6x - 4$$

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת ורציפה לכל x ולכן היא חייבת לחתוך את ציר x פעם אחת בלבד וזה קורה בנקודה השונה מ $x=1$ או $x=-\frac{1}{2}$ בלומר לא בנקודת אי רציפות.

(2) א.

$$(5+2y)^7 + A(x) + e^{1+2x} = B(y) - x^5$$

נגדיר פונקציה קבועה $f(x,y)$

$$f(x,y) = (5+2y)^7 + A(x) + e^{1+2x} - B(y) + x^5 = 0$$

לפי נוסחת הפונקציות המרומזות

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

$$= -\frac{A'(x) + 2e^{1+2x} + 5x^4}{7(5+2y)^6 \cdot 2 - B'(y)} = -\frac{\text{חיובי} + \text{חיובי} + \text{חיובי}}{\text{חיובי}} > 0$$

לכן $y(x)$ פונקציה עולה.

$A(x) \longrightarrow A'(x) > 0$ עולה

$B(y) \longrightarrow B'(y) < 0$ יורדת

ב. $\Pi(Q,T) = (6 - Q + \sqrt{T})Q - (T+2)Q$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_Q &= 6 - 2Q + \sqrt{T} - T - 2 = 0 \\ \Pi_T &= \frac{Q}{2\sqrt{T}} - Q = 0 \end{aligned}\right\} \quad Q = 2Q\sqrt{T} \qquad Q \neq 0$$

$$1 = 2\sqrt{T}$$

$$\sqrt{T} = \frac{1}{2} \qquad T = \frac{1}{4}$$

$$6 - 2Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - Q = 0 \qquad Q = 2.125$$

$$\Pi\left(2.125, \frac{1}{4}\right) =$$

$$\Pi_{QQ} = -2 \qquad \Pi_{QT} = \frac{1}{2\sqrt{T}} - 1$$

$$\Pi_{TT} = \frac{1}{4} Q T^{-3/2}$$

$$D = \frac{1}{2} Q T^{-3/2} - \left(\frac{1}{2\sqrt{T}} - 1\right)^2$$

$D\left(2.125, \frac{1}{4}\right) > 0 \qquad \Pi_{QQ} < 0$ לכן מקסימום

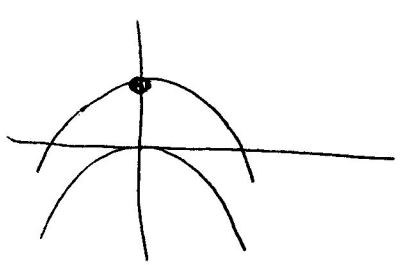
ג. יהי k סקלר חיובי $f(kx, ky) = (kx)^2 + ky - 1$

$f(x) = x^2 + y - 1$ לפי דרישת ההומוגניות, לכן הפונקציה אינה הומוגנית

עקומות שוות כמה

$$x^2 + y - 1 = -1 \qquad y = -x^2$$

$$x^2 + y - 1 = 1 \qquad y = -x^2 + 2$$



$$f(1,0) = 1^2 + 0 - 1 = 0$$

$$f(1,2x) = 1^2 + 2x - 1 = 2x$$

3

א.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}12&12&12\\12&12&12\\12&12&12\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I \qquad B^2=(2I)^2=4I^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\cdot 2I=\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\4&4&4\end{pmatrix} \qquad BA=2IA=2A=\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\4&4&4\end{pmatrix}$$

$$C=B^2+A^2+(AB)^2+(BA)^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&12&12\\12&12&12\\12&12&12\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}48&48&48\\48&48&48\\48&48&48\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}64&60&60\\60&64&60\\60&60&64\end{pmatrix}$$

ב. $B=I-A$

$$AB=A(I-A)=AI-A^2=A-A^2$$
$$BA=(I-A)A=IA-A^2=A-A^2$$

לכן קומוטטיביות
לגבי הכפל.